Apartes tomados de

Optimización y simulación
en
sistemas de recursos hidráulicos

Por Darío Valencia Restrepo
Profesor Titular de la
Facultad de Minas de la
Universidad Nacional de Colombia

Serie: Planificación de Recursos
PR-14

CIDIAT, Mérida, Venezuela, 1982

CAPITULO 2

OPTIMIZACION

2.1. GENERALIDADES

Consideremos un vector $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, cuyos elementos pueden ser las variables de diseño de un cierto problema, y sea $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función real que expresa las contribuciones de dichas variables a un determinado objetivo. El problema general de la optimización matemática es, entonces,

Maximizar
ó $\qquad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Minimizar

Sujeto a restricciones de la forma

$$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq c_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

en donde las h_i son funciones reales de X, y las constantes escalares c_i son usualmente los llamados recursos escasos. Estamos interesados, pues, en un valor de X, que denotaremos por $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, tal que cumpla las m restricciones (siendo por ello lo que se llama una solución factible) y que además sea óptimo en el sentido que hace máxima o mínima, según el caso, la función f.

Antes de seguir con el problema general, repasemos una situación más elemental que se estudia en el cálculo de funciones de varias variables. Se trata de lo que resulta en el mismo problema anterior cuando eliminamos las restricciones, es decir, cuando sólo nos interesa hallar un valor de X que haga máxima o mínima a f. Se sabe que una condición necesaria para que exista un màximo o un mínimo es

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \text{ en algún punto } X = X_o$$

Es posible encontrar otras condiciones que en asocio de la anterior constituyan una condición suficiente para el óptimo en el caso de n variables, pero limitémonos a presentar el caso n = 2. Las condiciones adicionales son

$$\frac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x_1{}^2} \; \frac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x_2{}^2} - \left[\frac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x_1{}^2} \begin{cases} < 0, \text{ para el caso de máximo} \\ > 0, \text{ para el caso de mínimo} \end{cases}$$

en donde X_o es un valor que anula las n primeras derivadas mencionadas antes. Se exige además que todas las derivadas de segundo orden sean continuas en un entorno de X_o. Puede observarse que la familiar situación cuando n = 1 se deduce de las anteriores condiciones.

Debe destacarse que las condiciones dadas no permiten establecer si se trata de un máximo (o un mínimo) local o global.

También es posible dar condiciones suficientes de otra manera. Sea $X = X_o$ un punto en el cual se anulan las n primeras derivadas. Si en una vecindad de X_o la función f es convexa, se trata de un máximo local o global; y si en una vecindad la función f es cóncava, se trata de un mínimo local o global.

Consideremos ahora el caso en que las restricciones son igualdades y no desigualdades como antes. Este nuevo problema puede ser resuelto mediante el procedimiento que veremos a continuación.

2.2. LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Vamos a resolver el problema

$$\text{Max.} \quad z = f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

$$\text{Sujeto a } h_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = c_i \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

(Es claro que análogamente podrá hablarse de una minimización)

Este problema de maximización condicionada puede reducirse a una maximización sin condiciones mediante el recurso ingenioso de los llamados multiplicadores de Lagrange. Para ello, formemos la expresión

$$u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) + \sum_{i=1}^{m} r_i \left[c_i - h_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\right]$$

en donde los r_i, los multiplicadores de Lagrange, quedan por determinar. Propongámonos ahora el problema de maximizar la expresión auxiliar, u. Podemos entonces, aplicar la condición necesaria vista en el numeral 2.1 y llegar a

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{\partial h_i}{\partial x_k} = 0 \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = c_k - h_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0 \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

Aquí tenemos un sistema de m + n ecuaciones con m + n incógnitas (las n variables de diseño y los m multiplicadores), sistema que en principio puede conducirnos a una solución que denotaremos por $(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*,\ r_1^*,\ r_2^*,\ \ldots,\ r_m^*)$. Vamos a demostrar que X^* es el máximo condicionado que buscamos, siempre que por otra parte las condiciones necesarias conduzcan efectivamente a un máximo de u.

Las últimas m ecuaciones del sistema no son otra cosa que las restricciones propuestas, de manera que ello nos asegura que X^* es una solución factible. Ahora, si X^* no es el máximo del problema original, quiere decir que existe un X_1^* tal que $f(X_1^*) > f(X^*)$ y que cumple las m restricciones. Pero ésto implicaría que en el punto $(X_1^*, r_1^*, r_2^*, \ldots, r_m^*)$ la función u tendría un valor mayor que en el punto $(X^*, r_1^*, r_2^*, \ldots r_m^*)$, lo que contradice la hipótesis de que u alcanza su máximo en este último punto .

2.2.1. Interpretación de los multiplicadores

Volviendo sobre la expresión auxiliar u, derivemos parcialmente con respecto a cualquier c_k,

$$\frac{\partial u}{\partial c_k} = r_k, \text{ ó bien } \quad \Delta u \cong r_k \Delta c_k$$

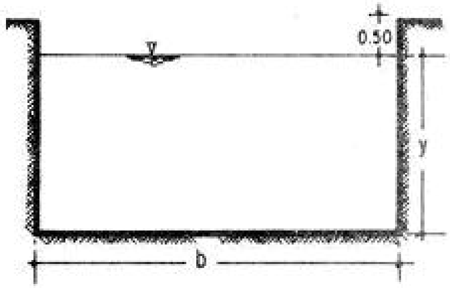
En el óptimo, $\Delta u \cong r_k^* \Delta c_k$

Lo anterior nos dice que la variación marginal relativa de u (o de z si estamos en el óptimo) con respecto a c_k es r_k. En otras palabras, un aumento unitario de c_k (si la unidad significa un aumento marginal con respecto al valor de c_k) producirá un aumento aproximado en la función de objetivos, z, igual a r_k^*.

En un contexto práctico, z bien puede ser la retribución que se obtiene de producir los bienes x_1, x_2, ..., x_n, y las c_k los recursos de mano de obra, maquinaria, etc. r_k sería entonces lo que los economistas llaman el precio "sombra" del recurso c_k, algo así como el precio "justo" de ese recurso, puesto que viene dado por su contribución marginal a la retribución z. En otra forma, diríamos que a lo sumo estamos dispuestos a pagar r_k por una unidad adicional de c_k.

2.2.2. Ejemplo: diseño de un canal

Supongamos que se desea transportar 30 m^3/s de agua, utilizando un canal rectangular cuya pendiente es de 0.0004 m/m y cuyo factor de rugosidad es 0.024. Sabiéndose que el costo unitario del revestimiento vertical es tres veces el del revestimiento horizontal, y que debe dejarse un borde libre de 0.50 m, se pregunta cuáles son las dimensiones óptimas del canal.



$Q = 30\ m^3/s$

$n = 0.024$

$s = 0.0004$

$c_v = 3\ c_h$ (costo de los revestimientos)

Las condiciones hidráulicas dadas por la fórmula de Manning permiten escribir

$$Q = A\ v = b\ y\ \frac{1}{n}\ R^{2/3}\ s^{1/2}$$

en donde el radio hidráulico, $R = \frac{by}{b + 2y}$

$$\Longrightarrow \frac{b^{5/3}\ y^{5/3}}{(b + 2y)^{2/3}} = \frac{n\ Q}{s^{1/2}} = 36.0$$

Nos encontramos, pues, ante el siguiente problema de minimización,

$$\text{Min. } z = c_v(2y + 1) + c_h\ b = 3\ c_h(2y + 1) + c_h\ b$$

$$= c_h(6y + 3 + b)$$

o en términos más simples,

$$\text{Min. } z = 6\,y + b$$

$$\text{Sujeto a} \qquad \frac{b^{5/3}\,y^{5/3}}{(b + 2y)^{2/3}} = 36{,}0$$

Introduciendo un multiplicador de Lagrange,

$$\text{Min. } u = 6y + b + r\left(36 - \frac{b^{5/3}\,y^{5/3}}{(b + 2y)^{2/3}}\right)$$

Derivando,

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 1 - \frac{r\,b^{2/3}\,y^{5/3}}{3(b-2y)^{2/3}}\left(5 - \frac{2b}{b + 2y}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6 - \frac{r\,b^{5/3}\,y^{2/3}}{3(b+2y)^{2/3}}\left(5 - \frac{4y}{b+2y}\right) = 0 \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 36 - \frac{b^{5/3}\,y^{5/3}}{(b + 2y)^{2/3}} = 0 \qquad (2.3)$$

Combinando las ecuaciones 2.1 y 2.2 puede eliminarse a r:

$$\frac{y}{b} = \frac{5\,b + 6\,y}{6(3\,b + 10\,y)} \qquad (2.4)$$

Finalmente, las ecuaciones 2.3 y 2.4 nos dan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$F\,(b,y) = 5\,b^2 - 12\,by - 60\,y^2 = 0$$

$$G(b,y) = \frac{b^{5/3} \quad y^{5/3}}{(b + 2y)^{2/3}} - 36 = 0$$

Aplicando un método adecuado, como por ejemplo el de Newton-Raphson, obtenemos como solución:

$$b^* = 11,23 \text{ m} \qquad\qquad y^* = 2,31$$

Y de la ecuación (2.2), $\qquad r^* = 0.26129$

En el óptimo, el costo es $z^* = c_h\ (13,86 + 3 + 11,23) = 28,09\ c_h$. Además de acuerdo con lo visto antes, el precio "sombra" de $nQ\ /\ s^{1/2}$ es $0.26129\ c_h$. Esto quiere decir que si la expresión $n\,Q\ /\ s^{1/2}$ aumenta en una unidad, el costo del canal aumentará aproximadamente en $0.26129\ c_h$. Si suponemos que el aumento unitario de la expresión se debe a un cambio ΔQ, tendremos:

$$n\ \Delta\ Q/\ s^{1/2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta Q = 0,83\ m^3/s$$

O sea que un aumento unitario de Q implicará un extracosto de canal igual a $0.26129\ c_h/0,83$ (precio "sombra" de Q).

2.2.3. Caso de desigualdades en las restricciones

Supongamos que se trata de

$$\text{Max. } z = f\ (X)$$

$$\text{Sujeto a} \qquad h_i(X) \leq c_i \qquad\qquad i = 1,\ 2, \ldots,\ m$$

Es bien posible que el máximo de z ocurra en un punto tal que alguno de los c_i, por ejemplo c_k, no se agote. Se tendrá, entonces, que $h_k(X) < c_k$, y se dice que la restricción k no es efectiva. Puede verse que el precio "sombra" de ese recurso, r_k^*, es cero, pues la contribución marginal de c_k a la función z es nula. De manera que al formular el procedimiento de los multiplicadores de Lagran ge

$$\text{Max. } u = f(X) + \sum_{i=1}^{m} r_i \, (c_i - h_i \, (X))$$

algunos de los r_i pueden ser nulos. Por lo tanto, al resolver el sistema de ecuaciones para las variables de decisión y los multiplicadores, deberá contemplarse la posibilidad de que uno o varios de estos multiplicadores se anulen. Se ensayarán ordenadamente todas las posibilidades, vigilando con cuidado que la solución de cualquier sistema así obtenido cumpla efectivamente las restricciones originales, antes de afirmar que ella es la óptima.

Obsérvese también que si todas las restricciones son igualdades, entonces m deberá ser menor que n si queremos que las restricciones no determinen o sobredeterminen a X. No es necesario que ésto ocurra si entre las restricciones hay desigualdades presentes.

2.3. PROGRAMACION DINAMICA

Por lo visto antes, la naturaleza de la función de objetivos puede ofrecer limitaciones muy severas a los diferentes algoritmos que se estudian en la optimización matemática. La programación dinámica, desarrollada por Richard Bellman en 1957 para tratar procesos cuyas decisiones se toman secuencialmente, no está restringida por requisitos de linealidad (ver numeral 2.4), convexidad o continuidad. Sin embargo, su aplicación exige que la función de objetivos pueda expresarse como una suma de funciones, cada una de las cuales incluya sólo una variable de decisión (separabilidad). Merced a ésto, el algoritmo de solución puede considerar el problema secuencialmente, asociando una etapa a cada variable de decisión.

Para aplicar el algoritmo a un cierto problema, será necesario definir con toda claridad cuáles son las etapas, las variables de decisión, las funciones de retribución (generalmente costos o beneficios que son consecuencia de la decisión que se tome en una etapa), y las variables de estados (generalmente recursos escasos). Para explicar el principio de optimalidad de Bellman, base de la programación dinámica, consideremos la Figura 2.1, en donde i denota la etapa, x_i las variables de decisión, H_i las variables de estado, y $R_i(x_i)$ las funciones de retribución.

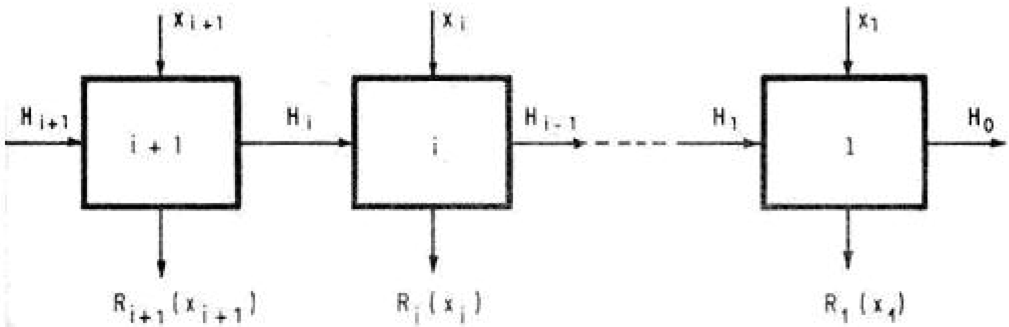


Figura 2.1

Usualmente, en la etapa i tendrá lugar un consumo $H_i - H_{i-1}$ del recurso escaso, como consecuencia de la decisión x_i. Y se tendrá que x_i es una función de ese consumo,

$$x_i = g_i\ (H_i - H_{i-1}) \quad \text{ó bien,} \quad H_i - H_{i-1} = g_i^{-1}(x_i)$$

Finalmente, se define una función de óptimos para cada etapa, cuyo argumento es la variable de estado H_i, y que denotaremos por $f_i(H_i)$, mediante la siguiente expresión recurrente

$$f_i(H_i) = \underset{x_i}{\text{Opt.}} \left[R_i(x_i) + f_{i-1}(H_{i-1})\right]$$

o bien, $$f_i(H_i) = \underset{H_{i-1}}{\text{Opt.}} \left[R_i(g_i(H_i - H_{i-1})) + f_{i-1}(H_{i-1})\right]$$

Este es el principio de Bellman. Expresa que la decisión x_i se determina hallando la retribución óptima, resultado de combinar la retribución inmediata de la etapa i con las retribuciones óptimas de las etapas anteriores.

En los ejemplos que se darán en este numeral, las variables de decisión serán discretas. Si, por ejemplo, se tuviere n etapas y k niveles de discretización para cada x_i, el problema podría abordarse combinatoriamente, así:hallar la combinación que hace óptimo a $\sum_i R_i(x_i)$, de entre las k^n combinaciones posibles. El principio de optimalidad de Bellman también aborda el problema combinatoriamente, pero reduciendo drásticamente el número de combinaciones mediante eliminación progresiva de combinaciones ineficientes.

2.3.1. Primer ejemplo: tuberías de presión y estaciones de bombeo

Se desea conducir $Q = 30\ m^3/s$ de agua a lo largo de una tubería de presión de longitud $L = 1000$ m y con una rugosidad absoluta $\xi = 0,1$ mm, desde una cota $H_s = 100$ m hasta una cota $H_t = 80$ m. Se pregunta si se justifica instalar una bomba que complemente la acción de la gravedad, y en caso afirmativo indicar la potencia correspondiente; en cualquier caso, indicar el diámetro de la tubería y el costo total de la obra. Se tiene lo siguiente:

a. COSTOS. El costo de la tubería instalada, por unidad de longitud, es una función del diámetro. Supongamos que este costo de instalación se expresa como una anualidad a perpetuidad, y denotémoslo por $C_1(D)$. El costo de la bomba se compone de dos partes: un costo de adquisición y un costo de mantenimiento y operación (que incluye especialmente el costo de energía). Reduciendo también a una anualidad a perpetuidad, denotemos este segundo costo por $C_2(P)$, pues debe ser una función de la potencia de la bomba.

b. CONDICIONES HIDRAULICAS. Utilizaremos la fórmula de Darcy-Weisbach, que para Q, L, f y D da las pérdidas por fricción

$$h_f = \frac{8f\ L\ Q^2}{\pi^2\ g\ D^5}$$

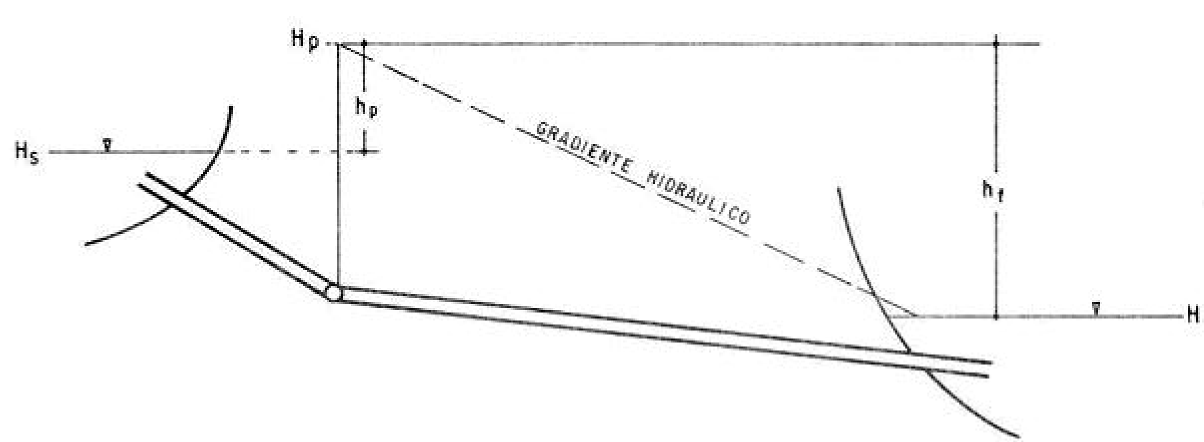


Figura 2.2

donde f es el factor de fracción. Para flujo turbulento se puede calcular con la expresión

$$1/\sqrt{f} = 1,14 + 2 \log D/\varepsilon$$

c. CONDICIONES DE BOMBEO. La potencia requerida en K_w para elevar el gradiente hidráulico una altura h_p (puede suponerse que la eficiencia e = 0,80) es

$$P = \frac{9.81}{e} \; Q \; H$$

Tendremos entonces dos etapas, una asociada con la variable de decisión D y la otra con la variable de decisión P; las funciones de retribución serán $C_1(D)$ y $C_2(P)$ respectivamente; y las variables de estado serán H_s, H_p y H_t. Todo ello aparece señalado en la Figura 2.3

Observamos que se trata de minimizar $Z = C_1(D) + C_2(P)$, y que efectivamente Z es una función separable. También, que tanto H_s como H_t son fijas, y que podemos definir $f_o(H_t) = 0$, o sea que consideramos como nulo el costo de terminar con una cota H_t. Se tratará, luego, de aplicar el principio de optimalidad para encontrar $f_1(H_p)$ y $f_2(H_s)$, lo que de paso nos llevará a encontrar la combinación de D y P.

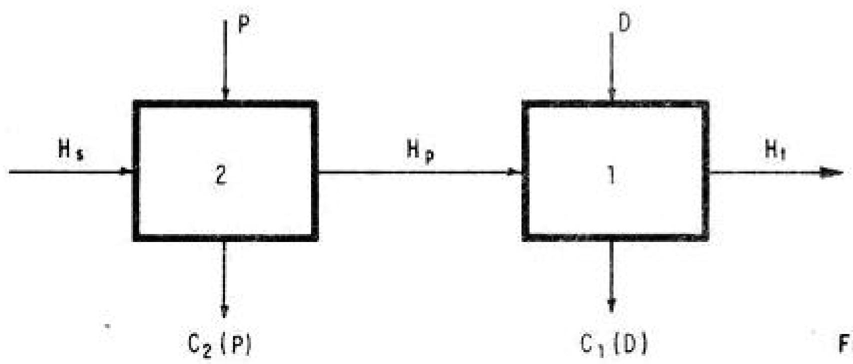


Figura 2.3

Los diámetros de tubería disponibles en el comercio varían discretamente. Supongamos que varían de 6 en 6 pulgadas:..., 30, 36, 42, 48,...Lo anterior limita el número de combinaciones que deben considerarse en la primera etapa, pues para cada diámetro existirán valores correspondientes de h_f (calculable de la fórmula de Darcy-Weisbach) y H_p ($H_p = 80 + h_f$), únicos que deben contemplarse. Un ejemplo numérico de lo que podría ser la tabla correspondiente a la etapa 1 se da en la Tabla 2.1. Allí se han supuesto algunos costos y sólo se incluyen cuatro entradas (renglones) de la tabla, entre las cuales se sabía estaba la solución óptima. De esta tabla se tomarán los valores correspondientes a H_p, para su posterior utilización en los cálculos de la segunda etapa, como se verá más adelante.

TABLA 2.1.

H_p (m)	D (pul)	f	h_f (m)	H_t (m)	$C_1(D)$ \$	$f_o(H_t)$ \$	C_1+f_o \$	$f_1(H_p)$
252,84	54	0,0113	172,84	80	2.89	0	2,89	2,89
180,10	60	0,0110	100,10	80	3,32	0	3,32	3,32
141,09	66	0,0109	61,09	80	3,73	0	3,73	3,73
118,92	72	0,0107	38,92	80	4,13	0	4,13	4,13

En la segunda etapa (ver Tabla 2.2.), para cada valor de H_p se encontrará un valor de h_p ($h_p = H_p - 100$), un valor de P (ver condiciones de bombeo), etc.

TABLA 2.2.

H_s (m)	P (Kw)	h_p (m)	H_p (m)	$C_2(P)$ \$	C_2+f_1 \$	$f_2(H_s)$ \$
100	56225	152,84	252,84	8,32	11,21	
100	29466	80,10	180,10	6,63	9,95	
100	15116	41,09	141,09	5,10	8,83	8,83
100	6960	18,92	118,92	4,90	9,03	

De manera que f_2 (100) = 8,83 = C_2 (15116) + f_1 (141), y a su vez f_1 (141) = C_1(66). Por lo tanto el diseño óptimo incluye una tubería de 66 pulgadas, acompañada de una bomba de 15116 Kw de potencia.

2.4. PROGRAMACION LINEAL

2.4.1. Generalidades

Volviendo al problema general de la optimización matemática, presentado en la página 35, supongamos que las funciones f y h_i son todas lineales, y que además exigimos que las x_i sean no negativas. Tendremos,

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

$$x_i \geqslant 0, \text{ para todo } i$$

Si definimos,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la formulación puede presentarse en forma matricial

$$\text{Max. } z = C^T X$$

Suj. a

$$A\,X \leqslant B$$
$$X \geqslant 0$$

En un espacio euclídeo de n dimensiones, $A\,X = B$ representa m hiperplanos, y $A\,X \leqslant B$ representa un hiperpoliedro convexo cuyas caras son los mencionados hiperplanos, como se muestra en la Figura 2.9. La función $C^T X$ caracteriza a una familia uniparamétrica de hiperplanos, paralelos entre sí puesto que

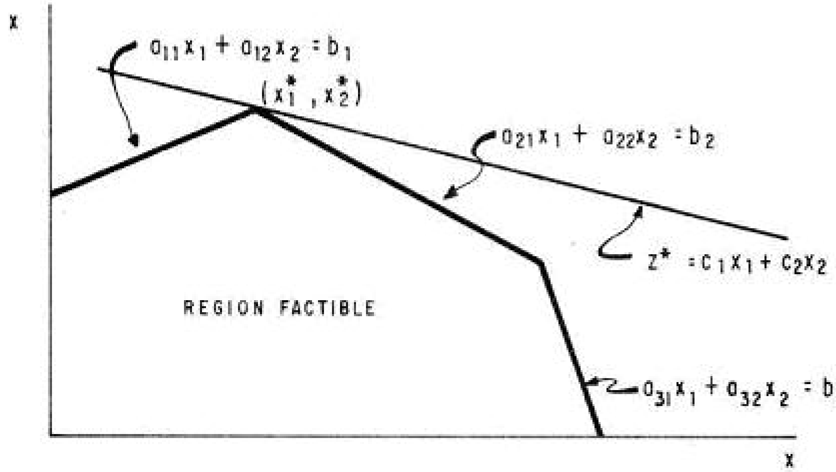


Figura 2.9

su dirección viene definida por los coeficientes c_i. Intuitivamente puede verse (no estamos demostrando nada!) que es bien posible que el hiperplano de esta familia que hace máximo a $C^T X$ pase por uno de los vértices, dándonos el punto óptimo X^*. Existen algoritmos muy desarrollados para encontrar la solución óptima, entre los cuales podría mencionarse el llamado Simplex, y que con ayuda de los computadores pueden manejar grandes números de variables y restricciones.

A todo problema de programación lineal puede asociarse otro, conocido como el dual del original, mediante

$$\text{Min} \quad v = B^T Y$$

Suj. a

$$Y^T \; A \geq C^T$$
$$Y \geq 0$$

en donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son las nuevas variables de decisión. Los dos problemas en cuestión reunen interesantes propiedades, entre las cuales vale la pena citar

$$v^* = B^T \, Y^* = C^T \, X^* = z^*$$

o sea que en los óptimos correspondientes las funciones de objetivos son iguales. Un análisis de esta propiedad nos indica que los v_i^* no son otra cosa que los precios "sombra" de los recursos escasos b_i.