ESTIMACION DE LA POBLACION DE SATURACION DEL AREA URBANA DEL AREA METROPOLITANA DE MEDELLIN

DARIO VALENCIA RESTREPO
Ingeniero Civil M.Sc, C.E.
Profesor Titular Universidad Nacional-Medellín
Consultor Empresas Públicas de Medellín

INTRODUCCION

Es común considerar la población de saturación de una ciudad como un número, cuando bien se sabe que dicha población es el resultado de la interacción de numerosas variables demográficas, socioeconómicas, urbanas y regionales. Dada la incertidumbre que se enfrenta al analizar dichas variables y la población de saturación, es aconsejable mirar ésta como una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad (FDP) debe estimarse de algún modo. Se presenta a continuación un método basado en este enfoque, el cual se aplica luego al caso del área metropolitana de Medellín, para cuyo efecto se hacen algunas suposiciones que podrían revisarse en el futuro con mayores elementos de análisis.

1.0 DEFINICION DE VARIABLES

Sea X: Densidad poblacional cuando se presente la saturación del área urbana de Medellín metropolitano (hab/ha).

Y: Tamaño del área urbana cuando se dé la saturación (ha).

Z: Población de saturación (hab).

Entonces $Z = X Y$

Si X e Y son variables aleatorias cuyas FDP son conocidas, Z es también una variable aleatoria cuya FDP puede hallarse con base en la teoría de funciones de distribución derivadas.

2.0 HIPOTESIS SOBRE LAS FDP DE X e Y

a) X tiene un valor mínimo igual a 160 hab/ha (aproximadamente la densidad estimada en la actualidad para la ciudad de Medellín propiamente dicha) y un valor máximo igual 340 hab/ha (aproximadamente la densidad estimada en la actualidad para la comuna oriental de Medellín).

b) Y tiene un valor mínimo igual a 16 000 ha y máximo de 20 000 ha. El primero es un valor que se encuentra entre el área urbana actual del Valle de Aburrá (12 285 ha.) y la comprendida por el perímetro urbano que se ha señalado para el área metropolitana (17 237 ha.); el segundo es un límite basado en condiciones topográficas y geológicas, mencionado en (1).

c) Las FDP de X e Y decrecen con X e Y, respectivamente, y ambas son de carácter hiperbólico. O sea:

$$F_X(x) = \frac{a}{x} \qquad F_Y(y) = \frac{b}{y}$$

d) X e Y son estadísticamente independientes.

En la Figura 1 se presentan los gráficos de $F_X(x)$ y $F_Y(y)$, con cambios de escala para facilitar los cálculos.

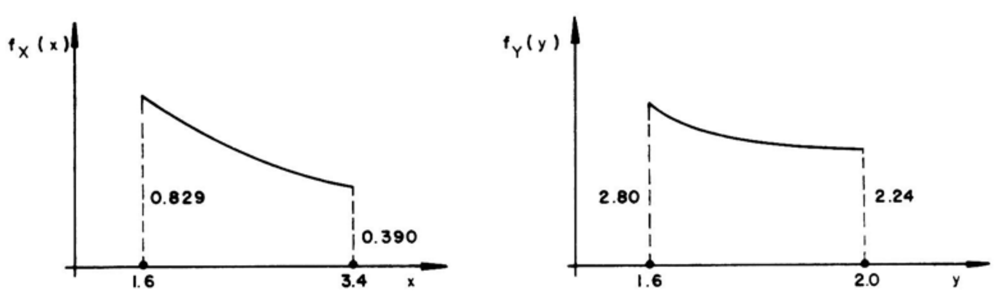
Se observa que X está dada ahora en cientos de habitantes por hectárea, e Y en diezmiles de hectáreas. Los parámetros a y b se calculan sabiendo que el area bajo la curva FDP es unitaria.

3.0 FDP PARA Z

Al tomar logaritmos en la ecuación $Z = XY$, se obtiene

$$\ln Z = \ln X + \ln Y$$
$$Z' = X' + Y'$$

Tal como se muestra en el anexo, la distribución de Z' puede hallarse mediante la integral de convolución, y resulta ser como aparece en la Figura 2.



$f_X(x) = \frac{1.327}{x}$ $\qquad$ $f_Y(y) = \frac{4.481}{y}$

$16 < x < 3.4$ $\qquad$ $16 < y < 2.0$

$f_X(x) = 0$ para otro x $\qquad$ $f_Y(y) = 0$ para otro y

Figura 1: Representación de las FDP de X e Y

(1) Area Metropolitana del Valle de Aburrá, Crónica Metropolitana 1981, Secretaría Ejecutiva, pág. 26.

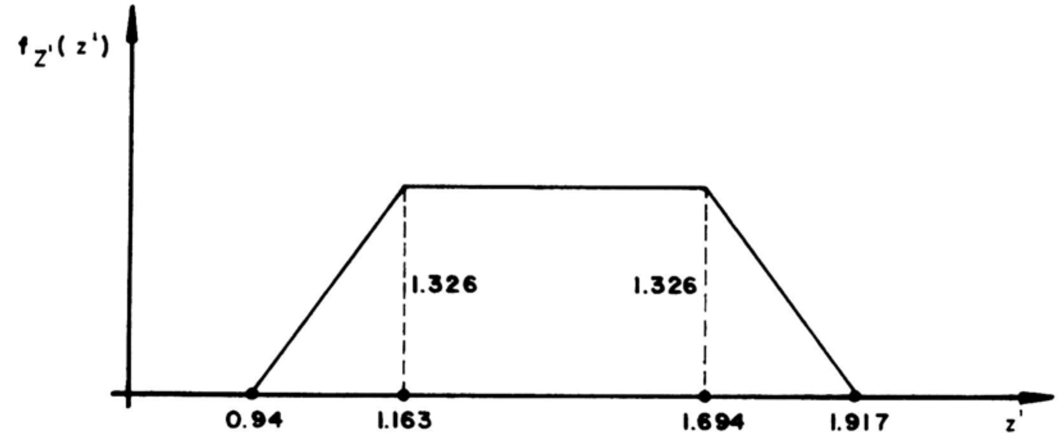


Figura 2 : Representación de la distribución $f_{z'}(z')$

Se define ahora $z_{C\%}$ como la población de saturación que tiene una probabilidad C % de no ser excedida. Con ayuda del gráfico, y teniendo en cuenta el carácter estrictamente creciente de la función logaritmo, se encuentra

C%	$\ln z_{c\%}$	$z_{c\%}$
50	1.429	4.17
60	1.504	4.50
70	1.580	4.85
80	1.655	5.23
90	1.821	6.18

Dados los cambios de escala, $z_{c\%}$ está expresado en millones de habitantes.

Es lógico pensar que diferentes decisiones que tengan que ver con la población de saturación, pueden ahora tomarse con diferentes confiabilidades (C%) según sea el caso.

4.0 CURVA LOGISTICA CORRESPONDIENTE A UNA CONFIABILIDAD DADA.

Si se conocen dos poblaciones censales, z_{t_0} Y z_{t_1}, dada la población de saturación, Z, es posible conocer la población en un instante t, z_t, mediante

$$z_t = h\ (z,\ z_{t_0}\ ,\ z_{t_1}\ ,\ t)$$

en donde h es la función que define la curva de crecimiento denominada logística (siempre que dicha ley de crecimiento sea aplicable a la población en cuestión).

Si z es una variable aleatoria, entonces para cada t, h define una variable aleatoria derivada de z.

Dado el carácter estrictamente creciente de la función h con z, para todo t, se concluye que para cada confiabilidad, C%, $Z_{c\%}$ tendrá asociado en cada t un valor de z_t que corresponde a dicha confiabilidad y que viene dado por la curva logística que define $Z_{c\%}$. De manera que esta curva logística puede verse como aquella asociada con la confiabilidad C%, en el sentido que se dio a C% anteriormente.

ANEXO

BUSQUEDA DE LA FDP DE Z'

Se tenía

$$Z = XY$$

$$f_X(x) = \frac{1.327}{x} \qquad 1.6 < x < 3.4$$

$$f_Y(y) = \frac{4.481}{y} \qquad 1.6 < y < 2.0$$

Tomando logaritmos

$$\ln Z = \ln X + \ln Y$$

Si $\quad Z' = \ln Z \quad , \quad X' = \ln X \quad , \quad Y' = \ln Y \quad$ se obtiene

$$Z' = X' + Y'$$

Dado el carácter monótono creciente de la función logaritmo, las FDP de X' e Y' resultan ser

$$f_{X'}(x') = \left|\frac{dx}{dx'}\right| f_X(x)$$

$$= x \frac{1.327}{x} = 1.327 \qquad \ln 1.6 < x' < \ln 3.4$$

$$0.47 < x' < 1.224$$

$$f_{Y'}(y') = \left|\frac{dy}{dy'}\right| f_Y(y)$$

$$= y \frac{4.481}{y} = 4.481 \qquad \ln 1.6 < y' < \ln 2.0$$

$$0.47 < y' < 0.693$$

Por tanto $f_{X'}(x')$ y $f_{Y'}(y')$ resultan ser uniformes

La FDP de Z' (suma de X' e Y') viene dada por la integral de convolución (cuando x'e y' son independientes):

$$f_{Z'}(z') = \int f_{X'}(z' - y')\, f_{Y'}(y')\, dy'$$

$$= \int 1.327 \times 4.481 \; dy'$$

$$= \quad 5.946 \; y' \Big]$$

en donde la parte delicada es el cálculo de los límites de integración para los diferentes valores de z'. Con ayuda del gráfico de la Figura 3 se encuentra

$$5.946\, y' \Big]_{0.47}^{z' - 0.47} \qquad \text{cuando} \qquad 0.94 < z' < 1.163$$

$$5.946\, y' \Big]_{0.47}^{0.693} \qquad \text{cuando} \qquad 1.163 < z' < 1.694$$

$$5.946\, y' \Big]_{z' - 1.224}^{0.693} \qquad \text{cuando} \qquad 1.694 < z' < 1.917$$

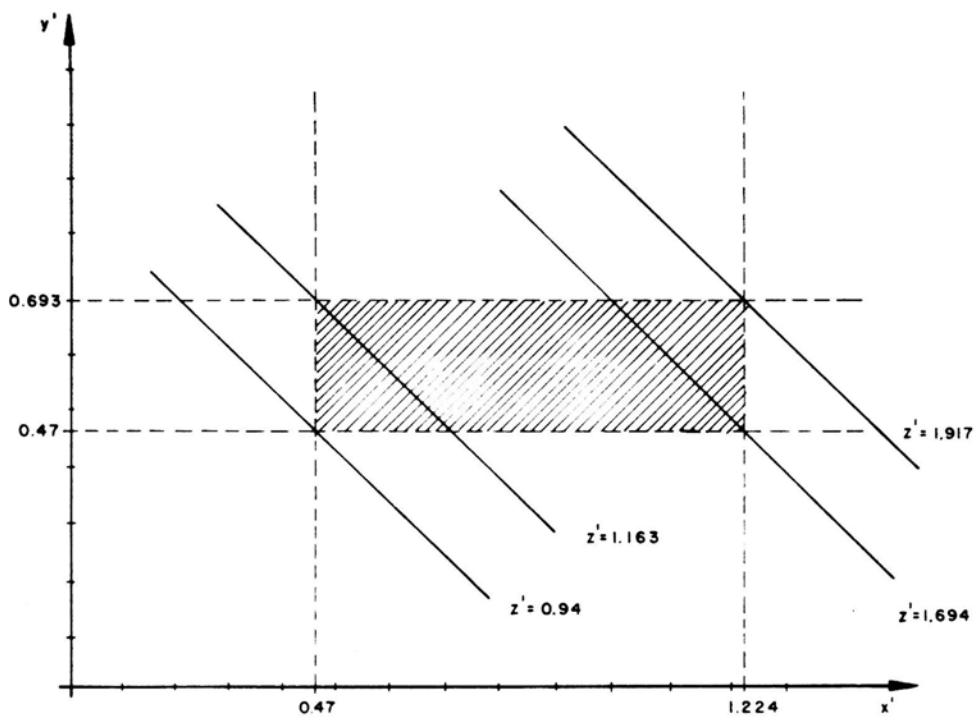


Figura 3: Límites de integración para los diferentes valores de z'

Obsérvese que:

a) El área sombreada señala la región del plano x' y' que contribuye a la integral de convolución.

b) La familia uniparamétrica de rectas (paralelas) $x' + y' = k$ queda clasificada en tres clases con respecto a la región antes mencionada, clases que vienen definidas por los tres intervalos dados para z' en la página anterior.

c) Para cada intervalo de clase, el gráfico permite encontrar los límites de la integral para y' (basta considerar una recta genérica $k = z$ en cada clase).

Conocidos ya los límites se llega a

$$f_{Z'}(z') = 5.946\, z' - 5.589 \qquad 0.94 < z' < 1.163$$

$$f_{Z'}(z') = 1.326 \qquad 1.163 < z' < 1.694$$

$$f_{Z'}(z') = -5.946\, z' + 11.398 \qquad 1.694 < z' < 1.917$$

Y así resulta el gráfico de la Figura 2. Como verificación, se calculó el área del trapecio resultante y se encontró igual a 1, lo que muestra que $F_{Z'}(z')$ es efectivamente una FDP.

AINSA
Revista de la Asociación
de Ingenieros Sanitarios de Antioquia
Año III, No. 1
Medellín, Colombia, febrero de 1983